

参考系在目标器轨道的 临近圆轨道最优脉冲交会研究

陈长青 解永春

(北京控制工程研究所)

摘要 在目标器质心建立临近圆轨道参考系的前提条件下,从地心引力下的二体运动入手,推导了相对运动的线性方程,并得到最优交会的必要条件;然后分四脉冲、三脉冲带漂移、三脉冲、二脉冲带漂移、二脉冲、奇异问题几种模式研究了最优交会问题的边界值求解问题和各模式之间的边界确定问题。

关键字 临近圆轨道 目标器轨道 脉冲交会 最优交会

1 引言

在交会对接过程中,对燃料消耗的优化一直是国内外学者研究的热点,上世纪 60 年代末,Prussing 关于临近圆轨道有限时间内多脉冲最优交会的研究是其间的成果之一。Prussing 针对邻近圆轨道平面内的交会问题,选择两圆形轨道的中间轨道建立参考坐标系,利用线性方程下共轭变量与状态变量的解耦性,分别对基向量和边界值问题进行求解,完成最优交会中脉冲时刻、脉冲方向和脉冲大小的求解,可以得到四脉冲、三脉冲、二脉冲等几种最优交会模式,且这些模式在不同的初始条件和交会时间下有确定的分布^[1,2]。Frank C. Liu 等^[3]选择平均速率参考轨道,重复了 Prussing 的工作,克服了中间轨道上建立参考坐标系存在的两个弊端。在国内也有不少学者在 Prussing 的最优交会理论上继续研究脉冲最优交会的问题。文献[4,5]在目标器质心建立参考系,研究 CW 方程下的四脉冲最优交会问题及其应用;文献[6]选择中间参考轨道建立参考系探讨了三脉冲最优交会问题;文献[7]研究了求解远距离接近段中的四次、三次、二次最优冲量解作用时间和大小的算法,其坐标系建立在目标器质心。

本文选择目标飞行所在的圆轨道作为参考轨道,研究临近圆轨道交会问题,给出不同脉冲交会模式的分布,这种方法在工程应用上更简单、适用。本文先给出动力学模型,再分析几种脉冲模式的边界值问题及各种脉冲模式边界的确定。

2 动力学方程和最优交会的必要条件

先考虑只有地球引力作用的圆轨道二体运动,在轨道平面内用极坐标表示如下:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 r 为轨道半径, θ 为升交点幅角。

再考虑相对运动问题。如图 1,追踪器与目标器在同一轨道面上,两者之间的相位角差为 β 。选择目标器所在的圆轨道为参考轨道($r=a$),参考系的初始原点为目标器的初始位置。追踪器的轨道半径为 $r=a+\Delta r$,与参考轨道原点的相位角差为 $\Delta\theta$,当 $\Delta r/a$ 比较小时,针对 $r=a$ 的参考圆轨道,可以得到如下的线

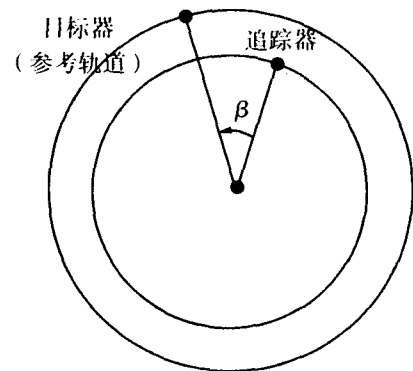


图 1 相对运动和参考轨道

性相对运动方程:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{r} = 3\omega \Delta \dot{r} + 2a - r\omega \Delta \dot{\theta} \\ a \Delta \dot{\theta} = -2\omega \Delta \dot{r} \end{cases} \quad (2)$$

其中 ω 为参考轨道的角速度, 取 $\Delta r = a\delta r, \Delta \theta = \delta \theta, \tau = \omega(t - t_0)$, 式(2)无量纲化后有:

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = 3\delta \dot{r} + 2\delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{\theta} = -2\delta \dot{r} \end{cases} \quad (3)$$

两个航天器轨道高度差为 ΔR , 无量纲化为 δR , 记状态变量 $\vec{x} = [\delta R \ \delta \theta \ \delta \dot{R} \ \delta \dot{\theta}]^T$, 则最优交会的初末状态分别为 $\vec{x}_0 = [-\delta R \ -\beta \ 0 \ 1.5\delta R]^T, \vec{x}_\tau = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 式(3)写成状态方程的形式为:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{r} \\ a\delta \dot{\theta} \\ \delta \ddot{r} \\ a\delta \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 1 & 2\omega \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ a\delta \theta \\ \delta \dot{r} \\ a\delta \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

该方程的状态转移矩阵为:

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} 4-3\cos\tau & 0 & \sin\tau & 2(1-\cos\tau) \\ -6\tau+6\sin\tau & 1 & -2(1-\cos\tau) & 4\sin\tau-3\tau \\ 3\sin\tau & 0 & \cos\tau & 2\sin\tau \\ 6\cos\tau-6 & 0 & -2\sin\tau & -3+4\cos\tau \end{bmatrix} \quad (5)$$

定义方程(4)中的共轭变量 $\vec{p} = [\lambda \ \mu]^T$ 为基向量, 则存在与状态方程(4)相同且独立的基向量方程^[1,2]:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 3\lambda + 2\mu \\ \dot{\mu} = -2\lambda \end{cases} \quad (6)$$

该方程存在如下的基向量解:

$$\begin{cases} \lambda = A(\cos\tau + 2B) \\ \mu = A(-2\sin\tau - 3B\tau + C) \end{cases} \quad (7)$$

其中 A, B, C 为待定常数, 通过基向量问题的求解可以获得。

可以得到满足最优交会的必要条件^[1,2]: (1) 基向量必须是连续的且一阶导数也是连续的; (2) 在转移过程中满足 $|\vec{p}| \leq 1$, 且在施加脉冲时 $|\vec{p}| = 1$; (3) 脉冲方向为基向量的单位矢量方向; (4) 除初末脉冲外, 在其他的脉冲时刻有 $|\dot{\vec{p}}| = 0$.

3 以目标器为参考轨道的最优交会问题

3.1 基向量求解

结合式(7)和最优交会的必要条件, 根据不同的脉冲模式可以求得基向量, 这与 Prussing^[1,2]文章中的工作一样。

3.2 边界值问题求解

多脉冲最优交会的边界值问题可以用式(8)表示, 如下:

$$\delta \vec{x}_F = \Phi_{F0} \delta \vec{x}_0 + \sum_i \Phi_{Fi} B \vec{u}_i \Delta V_i \quad (8)$$

其中 Φ_{Fi} 由式(5)确定, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, \vec{u}_i 为第 i 个脉冲的方向, ΔV_i 第 i 个脉冲的幅值。由式(8)得:

$$\delta \vec{x}_F = \delta \vec{x}_F - \Phi_{F0} \delta \vec{x}_0 = \sum_i \Phi_{Fi} B \vec{u}_i \Delta V_i \triangleq W \Delta \vec{V} \quad (9)$$

其中 $W = [\Phi_{F1} B \vec{u}_1 \ \Phi_{F2} B \vec{u}_2 \ \Phi_{F3} B \vec{u}_3 \ \Phi_{F4} B \vec{u}_4]$,

$\Delta \vec{V} = [\Delta V_1 \ \Delta V_2 \ \Delta V_3 \ \Delta V_4]$, 则:

$$\Delta \vec{V} = W^{-1} \delta \vec{x}_F \quad (10)$$

由两航天器初末相对状态和式(5)的状态转移矩阵有:

$$\delta \vec{x}_F = [\delta R \ -\beta - 1.5a\delta R \ 0 \ -1.5a\delta R]^T \quad (11)$$

式(11)与 Prussing^[1,2]、Frank C. Liu^[3]工作中的差别只有 $-\beta$ 不同, 前面已分析, 选择不同的参考轨道, 基向量方程求解是一致的。所以参考坐标系的选择并没有影响最优交会的结论, 这在 Frank^[3]的文章中也有体现。

下面分四脉冲、三脉冲、二脉冲、奇异问题几种模式研究临近圆轨道的最优交会问题和各脉冲模式的分布边界问题。在讨论带漂移问题时, 因为带初始漂移与带末端漂移具有对称性, 这里只考虑带末端漂移问题。

3.2.1 四脉冲最优交会

四脉冲最优交会模式具有对称性, 可以利用交会时间一半时的状态(下标 H)进行分析, 式(10)变为:

$$\delta \vec{x}_H = H \Delta \vec{V} \quad (12)$$

其中 $\delta \vec{x}_H = \delta \vec{x}_H - \Phi_{H0} \delta \vec{x}_0 = \Phi_{HF} \delta \vec{x}_F - \Phi_{H0} \delta \vec{x}_0, H = \Phi_{HF}$
 $W = [\vec{h}_1 \ \vec{h}_2 \ \vec{h}_3 \ \vec{h}_4]$ 。

记 $m \triangleq h_{11} h_{14} - h_{12} h_{41}, k \triangleq h_{22} h_{31} - h_{21} h_{32}, q_j = 2h_{4j} + 3h_{3j} (j=1,2), \delta \theta_F = -\beta - 0.75a\delta R$, 通过推导可以求得四脉冲最优交会的四个脉冲为:

$$\Delta \vec{V} = \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} q_2/m & -2h_{32}/k \\ -q_1/m & 2h_{31}/k \\ q_1/m & 2h_{31}/k \\ -q_2/m & -2h_{32}/k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta \theta_f \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.2.2 带漂移的三脉冲最优交会

带漂移的三脉冲最优交会是四脉冲最优交会中特殊的一种,即第四个脉冲为零。在基向量求脉冲方向时同样具有对称性,这时矩阵是奇异的,可以求得:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{q_2}{2m} \delta R, \Delta V_2 = \frac{\delta R}{4m} (-q_2 \frac{h_{31}}{h_{32}} - q_1), \\ \Delta V_3 &= \frac{\delta R}{4m} (-q_2 \frac{h_{31}}{h_{32}} + q_1) \end{aligned} \quad (14)$$

3.2.3 不带漂移的三脉冲最优交会

不带漂移的三脉冲最优交会的边界值问题为:

$$\delta \tilde{x}_f = W \Delta \vec{V} \quad (15)$$

第三个脉冲的方向为:

$$\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rightarrow \\ u_3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ u_{3r} \ u_{3t}]^T \quad (16)$$

这时应该有:

$$\left| \delta \tilde{x}_f \ \vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \vec{w}_3 \right| = 0 \quad (17)$$

结合式(15)、(16)、(17)、基向量方程和最优交会的必要条件,通过求非线性方程组可以求得中间脉冲时刻、三个脉冲的大小和方向。

3.2.4 二脉冲最优交会

二脉冲最优交会的边界值问题满足:

$$\delta \tilde{x}_2 = \Phi_{2f} \delta \tilde{x}_f = \Phi_{21} B \Delta \vec{V}_1 + \Phi_{22} B \Delta \vec{V}_2 \quad (18)$$

其中 $\Delta \vec{V}_1, \Delta \vec{V}_2$ 分别为 τ_1, τ_2 时刻的脉冲矢量,通过式(18)可进一步求得基向量:

$$\lambda_i = \frac{\Delta V_{ir}}{\Delta V_i}, \mu_i = \frac{\Delta V_{it}}{\Delta V_i}, i=1,2 \quad (19)$$

从而求得式(7)式中的参数,通过必要条件判断所求的脉冲是否满足二脉冲最优交会。

3.2.5 奇异解问题

对式(7)进行展开,基向量解也可以用下式表示:

$$\begin{cases} \lambda = A'' \cos \tau + B'' \sin \tau + 2C'' \\ \mu = 2B'' \cos \tau - 2A'' \sin \tau - 3C'' \tau + D'' \end{cases} \quad (20)$$

当 $A''=B''=C''=0, D''=1$ 时, $\lambda=0, \mu=1$ 容易验证对所有的时刻 τ 都满足必要条件,即在所有时刻的脉冲方向是固定的,但是脉冲的具体时刻无法给出。

对于两脉冲的奇异问题,其边界值方程如下:

$$\begin{bmatrix} \delta R \\ \delta \theta_f \\ 0 \\ -1.5\delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\cos\alpha) & 0 \\ -3\alpha+4\cos\alpha & 0 \\ 2\sin\alpha & 0 \\ 4\cos\alpha-3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $\delta \theta_f = \delta \bar{\theta}_f - 0.75\delta R(\tau_f - \tau_0)$, 方程(21)的第三个式子表明,当 $\Delta V_1 \neq 0$, 只能 $\alpha = n\pi$, 当 n 为奇数时,可以解得:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = 0.25\delta R, \delta \theta_f = 0 \quad (22)$$

当 $n=1$ 时,为 Hohmann 最优交会。Hohmann 最优交会考虑的是不存在自由漂移的情况,当存在末端漂移时,即 $\tau_f > \tau_2$, 这时要求 $\delta \theta_f = -0.75\delta R(\tau_f - \tau_2)$; 存在初始漂移时,必须 $\delta \theta_f = 0.75\delta R(\tau_1 - \tau_0)$; 介于这两条直线之间的任意点,都可以由初始漂移、末端漂移和 Hohmann 最优交会组合而成,它们的燃料消耗一致,均为 $\Delta V = 0.5\delta R$ 。

3.3 各种脉冲模式边界问题分析

3.3.1 四脉冲

通过分析,四脉冲最优解存在时必须满足两个条件:

$$(1) \ h_{31}/h_{32} < 0 \quad (23)$$

$$(2) \ \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} q_2/m\delta R - 2h_{32}/k\delta\theta_f \\ -q_1/m\delta R + 2h_{31}/k\delta\theta_f \\ q_1/m\delta R + 2h_{31}/k\delta\theta_f \\ -q_2/m\delta R - 2h_{32}/k\delta\theta_f \end{bmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

记 $M = \left| \frac{k}{2m} \frac{q_2}{h_{32}} \right|, N = \left| \frac{k}{2m} \frac{q_1}{h_{31}} \right|$ 。在仿真过程中,可以看到 M, N 均是单调的,其中 M 单调下降, N 单调上升, 它们的交点满足 $\frac{q_2}{h_{32}} = \frac{q_1}{h_{31}} > 0$ 。通过对式

(24)展开分析,并通过仿真可以得到四脉冲最优交会的成立条件:若 $M > N > 0$, 则 $\left| \frac{\delta \theta_f}{\delta R} \right| \geq M$, 若 $N > M > 0$,

则 $\left| \frac{\delta \theta_f}{\delta R} \right| \geq N$ 。当 $\frac{q_2}{h_{32}} = \frac{q_1}{h_{31}}$ 时, 四脉冲最优交会中

$\left| \frac{\delta \theta_f}{\delta R} \right|$ 最小, 而这一点同时满足三脉冲带漂移最优交会模式和两脉冲带漂移最优交会模式。

3.3.2 三脉冲带漂移

三脉冲带漂移最优交会问题必须满足两个条件:

$$(1) \ h_{31}/h_{32} < 0; (2) \ \left| \frac{q_2}{h_{32}} \right| \geq \left| \frac{q_1}{h_{31}} \right|$$
。由 3.2.1 节中的

分析,带漂移段的三脉冲模式是四脉冲模式中第四个脉冲为零的特殊情况,其右边界就是四脉冲模式的左边界。其左边界为四脉冲模式左边界延伸得到,从四脉冲模式的左边界可以得到第三、第四个脉冲的时间 τ_3, τ_4 和末端状态 $\frac{\delta\theta_{F4}}{\delta R}$,则三脉冲的左边界为

所有坐标点 $(\tau_3, \left| \frac{\delta\theta_{F4}}{\delta R} \right| - \left| \frac{3(\tau_4 - \tau_3)}{4} \right|)$ 的组合。下边界同时满足二脉冲带漂移模式,是由四脉冲模式的最低点所在的直线 $\left| \frac{\delta\theta_{F3}}{\delta R} \right| = \left| \frac{\delta\theta_{F4}}{\delta R} \right| - \left| \frac{3(\tau - \tau_3)}{4} \right|$,

$\tau \in (\tau_3, \tau_4)$ 决定。

3.3.3 三脉冲

三脉冲最优交会与其相邻的脉冲模式是连续的,所以三脉冲交会模式的左边界是二脉冲模式的右边界,右边界为三脉冲带漂移模式的左边界,下边界与二脉冲带漂移模式相连。

3.3.4 二脉冲

对于确定的交会时间和初末状态,在非奇异时,可以求得唯一的二脉冲机动脉冲,同样也可以求得唯一的基向量,通过判断基向量是否满足必要条件,可以决定是否两脉冲最优。

从仿真可以看到,两脉冲最优交会只有在交会时间比较短时成立,且对于确定的 $\left| \frac{\delta\theta_F}{\delta R} \right|$,有一个最大的满足二脉冲最优交会的交会时间,通过搜索最大的交会时间可以确定二脉冲最优交会的存在范围。

3.3.5 二脉冲带漂移

二脉冲带漂移是二脉冲最优交会中特殊的一类,其边界的判断实际上是在 3.3.4 节判断基础上,增加了对第二个脉冲时刻基向量的判断,即判断其导数是否为零。若导数为零,则二脉冲带漂移的最优解存在,通过求满足 $|\vec{p}|=1$ 且大于 τ_2 的最小时间,即第三个脉冲时刻 τ_3 。则二脉冲带漂移最优交会成立的区域为直线束: $\frac{\delta\theta_F}{\delta R} = \frac{\delta\theta_{F2}}{\delta R} \pm \frac{3(\tau - \tau_2)}{4}, \tau \in (\tau_2, \tau_3)$ 。

3.3.6 Hohmann 转移及漂移

在 3.2.5 节奇异问题的讨论中,已经知道 Hohmann 转移及带漂移的 Hohmann 转移夹在直线 $\delta\theta_F = 0.75\delta R(\tau_f - \tau)$ 和 $\delta\theta_F = -0.75\delta R(\tau_f - \tau)$ 之间(含两条直线)。

3.4 最优交会各脉冲模式的分布图

综合 3.2, 3.3 的分析,得到各种脉冲模式的分布

图如图 2:

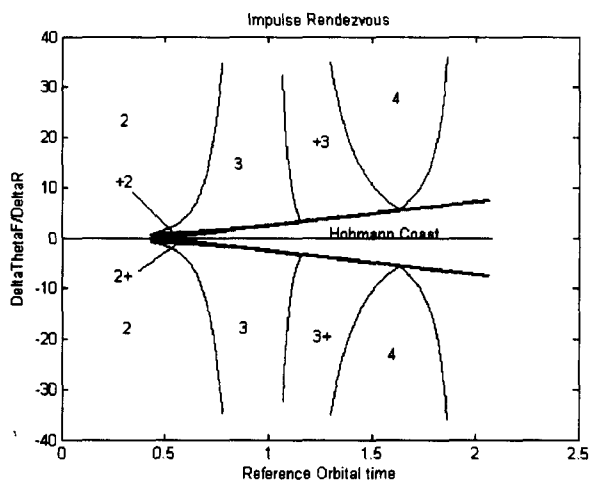


图 2 最优交会各脉冲模式分布

图 2 中,2,3,4 分别表示二脉冲、三脉冲、四脉冲交会模式,数字前头的+表示带初始漂移,数字后头的+表示末端带漂移,该图与文献[1,2,3]中的结论是一致的。

4 总结

本文在目标器所在的圆轨道上建立参考坐标系,研究临近圆轨道的最优交会问题,详细研究了各种最优交会模式的求解和边界的获取。研究结果表明,在目标器所在的圆轨道建立参考系,可以获得与以中间轨道为参考轨道一致的结果。◇

参考文献

- [1]John E. Prussing. Optimal Four-Impulse Fixed-Time Rendezvous in the Vicinity of a Circular Orbit. AIAA Journal, Vol. 7, No. 5, May 1969, pp: 928-935.
- [2]John E. Prussing. Optimal Two and Three-Impulse Fixed-Time Rendezvous in the Vicinity of a Circular Orbit. AIAA Journal, Vol. 8, No. 7, 1970, pp: 293-310.
- [3]Frank C. Liu, Larry D. Plexico. Improved Solution of Optimal Impulsive Fixed-Time Rendezvous. Journal of Spacecraft and Rocket, Vol. 19, No.6, 1982.
- [4]陈新海,陈文胜.航天器四脉冲固定时间最优交会.宇航学报, No. 2,4,1994.
- [5]雷勇,汤国建,王旭东.联盟 TM 交会对接的地面远程导引段制导方法分析和研究.航天控制, No.4, 1999.
- [6]齐映红,曹喜滨.三脉冲最优交会问题的解法.吉林大学学报(工业版), 2007.7, Vol. 36, No.4.
- [7]许伦辉,徐建闽.交会对接远距离接近段制导研究.飞行力学, Vol. 16, No.2, 1998.