

引力加速度估计函数用于快速准确的引力计算

童科伟 周建平 何麟书

(北京航空航天大学宇航学院)

摘要 介绍一种实用准确的计算量相对很小的引力加速度估计函数方法。试验结果表明其计算量与全阶数的引力估计函数相比几乎可以忽略,而二者计算精度相当。此方法的唯一缺点是存储量较大。

关键词 引力加速度估计函数 引力场模型 算法

目前引力场模型的计算公式都是基于球谐函数,每次都需要计算一组 Legendre 多项式。目前常用的引力场模型如 JGM3、EGM96 等模型的阶数都很大,如达到 70×70 阶。要想准确的计算出这类 70×70 阶的模型会带来巨大的计算量。

用来改进引力加速度计算速度的方法主要有:利用截断的引力模型(如仅采用 30×30 的引力场模型)、预先选择一组对引力加速度影响最大的系数(如仅考虑 J₂,J₃,J₄ 项等)等。Hujsak^[1]提出引力加速度估计函数(Gravity Acceleration Approximation Function, GAAF),他把地球的引力加速度用瞬时地球伪地心表示的瞬时二体加速度模型来表示,然后用分数多项式来拟合各个高度的固定经纬度的一组伪中心。在各种经纬度上计算出一组多项式系数并存储起来,利用这些预先计算出来的系数就可以计算出引力加速度。本文基于 Hujsak 的方法,但考虑到载人航天主要在近地轨道,另外采用合适的拟和模型。

1 伪中心方法

给定航天器的地心固连(ECEF)引力加速度 \mathbf{a}_{ECEF} ,利用限制性二体运动方程可以计算出一个伪中心 \mathbf{c}_{ECEF_0} 。

$$\mathbf{a}_{ECEF} = -\mu \frac{\mathbf{p}_{ECEF}}{\rho^3} \quad (1)$$

其中 \mathbf{p}_{ECEF} 是航天器的伪半径。 \mathbf{a}_{ECEF} 是利用球谐系数计算出来的非球形加速度。

现在航天器的真实半径等于伪半径加上伪中心。伪中心是从地心到某个位置,把此位置当作地心时计算出的施加于卫星的限制性二体加速度与施加于卫星的非球形加速度相等:

$$\mathbf{r}_{ECEF} = \mathbf{p}_{ECEF} + \mathbf{c}_{ECEF} \quad (2)$$

伪半径向量的方向与加速度的方向相反,经过推导可求得(具体推导参见^[1]):

$$\mathbf{c}_{ECEF} = \mathbf{r}_{ECEF} + \sqrt{\mu} \frac{\mathbf{a}_{ECEF}}{|\mathbf{a}_{ECEF}|^{3/2}} \quad (3)$$

利用上式计算出来的伪中心的模在飞行高度大于 100km 时小于 15km ($|\mathbf{c}_{ECEF}| < 15\text{km}$)。而引力加速度计算中忽略掉 J₂ 项可以使得 $|\mathbf{c}_{ECEF}| < 250\text{m}$,这可以改进精度,并减小有效位数的损失^[1],因此在利用伪中心复原加速度以后再加上忽略的 J₂ 项加速度。

$$\mathbf{a}_{ECEF_0} = \mathbf{a}_{ECEF} - \mathbf{a}_{ECEF_{J_2}} \quad (4)$$

$$\text{其中: } \mathbf{a}_{ECEF_{J_2}} = \begin{pmatrix} J_2 \frac{3}{2} \frac{\mu x}{r^3} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \left(5\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right) \\ J_2 \frac{3}{2} \frac{\mu y}{r^3} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \left(5\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right) \\ J_2 \frac{3}{2} \frac{\mu z}{r^3} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \left(5\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right) \end{pmatrix}$$

现在,伪中心的计算就与 J₂ 项无关了:

$$\mathbf{c}_{ECEF} = \mathbf{r}_{ECEF} + \sqrt{\mu} \frac{\mathbf{a}_{ECEF_0}}{|\mathbf{a}_{ECEF_0}|^{3/2}} \quad (5)$$

伪中心多项式表示为高度的函数。

首先需要确定航天器运行的高度范围以便求得一组可以计算出引力加速度的系数。由于目前载人航天主要在近地轨道,本文主要考虑 LEO 圆或近圆轨道的交会对接,高度范围主要在 200~350km。

为了拟和在所求高度范围的给定经纬度的伪中心,文献^[1]建议采用分式多项式的形式:

$$c_k = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}}{1 + b_1 x + \dots + b_{d-1} x^{d-1}} \quad (6)$$

其中： $x = \frac{h-h_{\min}}{h_{\max}-h_{\min}}$ 。k=1,2,3 分别代表地固坐标系下的 x、y、z 三个方向。

由于分式多项式的拟和比较复杂，而且计算量也比普通多项式要大，为了简化计算，本文不采用分式多项式，而主要考虑采用普通多项式模型：

$$c_k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1} \quad (7)$$

或者取中心化模型：

$$c_k = a_0 + a_1 (x-\bar{x}) + a_2 (x-\bar{x})^2 + \dots + a_{p-1} (x-\bar{x})^{p-1},$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n \quad (8)$$

此外还有非线性模型：

$$c_k = 1 / (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1}) \quad (9)$$

求拟和系数时可转化为线性化模型：

$$1/c_k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1}$$

其中 p 为多项式的阶数。考虑到求解方程时，阶数越大，带来的奇异性越大，一般取阶数 p < 10。

求解出所有待求经纬度的系数以后就可以利用上面的模型计算出某点的伪中心。实际计算某点引力加速度时，首先计算出某点附近的六个特征点的伪中心，然后利用六点双变量插值^[3]计算出此待求点的伪中心，最后利用式(4)求出引力加速度。

2 存储要求

对于单精度时，需要存储的字节数为：

$$\text{拟和系数} \times \text{经度数} \times \text{纬度数} \times 3 \times 4 \text{byte}$$

对于双精度时，需要存储的字节数为：

$$\text{拟和系数} \times \text{经度数} \times \text{纬度数} \times 3 \times 8 \text{byte}$$

其中：3 表示 3 个方向，4 为单精度浮点数的存储位数，8 为双精度浮点数的存储位数。

对于在 350km，倾角约为 42° 的 LEO 轨道，考虑经度为 -180°~180°，纬度为 -45°~45°。

为了简化，可以选择经纬度的间隔为 1.5° 或 2°。这样经度个数为 241 或者 181，纬度个数约为 61 或者 46。若取拟和系数的阶数为 6，则对于双精度需要的存储量约为 2Mb 或 1.1Mb。

3 求解拟和系数

假设待拟和点的个数为 n，这样

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_n]^T$$

为了避免奇异性，多项式个数不宜太大，假设多项式系数的个数为 p=2~10：

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{p-1}]^T$$

每个固定经纬度对应于 x 的伪中心为： $C_k = [C_{k0} \ C_{k1} \ C_{k2} \ \dots \ C_{kn}]^T$ ，其中 k=1,2,3 分别对应于坐标系的 x、y、z 轴。

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{p-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{p-1} \end{bmatrix}, \text{残差 } \epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_n]^T;$$

定义正规方程如下：

$$C = Xa + \epsilon$$

正规方程的解 a 即对应于拟和了伪中心向量 C 的多项式系数。求解的方法如最小二乘法，为^[2]：

$$a = (X^T X)^{-1} X^T C \quad (10)$$

4 确定最优多项式系数的数目

由文献[2]，残余均方(RMS) σ^2 为：

$$\sigma^2 = \frac{y^T y - a^T X^T y}{n-p} \quad (11)$$

利用此公式作为拟和阶数选取的判断依据。

5 近地轨道定轨精度分析

利用 EGM96 引力场模型，取到 70×70 阶。

考虑近地轨道，轨道高度为 200~350km。为了具有代表性，距离间隔取为 75m，这样在整个高度范围共取 2000 个点。为了选择合适的阶数，并判断拟和模型的合理性，选择几个特殊点，其纬度和经度分别为 (0°,0°)、(-10°,90°)、(30°,30°)、(-30°,-100°)、(-30°,140°)。

6 选取合适的多项式的阶数

取普通多项式模型式(7)，拟和的最小残差和相应的阶数 p 分别为：

表 1 普通多项式模型特征点的拟和残差

	p	σ_x	σ_y	σ_z
(0°,0°)	5	2.11E-8	1.18E-9	1.19E-9
(-10°,90°)	5	2.22E-8	2.18E-8	5.03E-10
(30°,30°)	6	6.25E-9	3.19E-9	1.90E-9
(-30°,-100°)	5	3.89E-9	6.56E-10	4.10E-9
(-30°,140°)	5	3.07E-8	3.51E-9	3.97E-8

取中心化模型式(8)，结果如下：

表 2 中心化多项式模型特征点的拟和残差

	p	σ_x	σ_y	σ_z
(0°,0°)	7	5.23E-11	6.42E-12	4.67E-12
(-10°,90°)	6	1.10E-10	3.73E-11	1.37E-11
(30°,30°)	7	1.80E-11	3.68E-12	5.61E-12
(-30°,-100°)	6	1.56E-11	1.17E-12	1.82E-11
(-30°,140°)	6	5.23E-11	1.215E-11	1.05E-10

选择非线性模型式(9),结果如下:

表 3 非线性多项式模型特征点的拟和残差

	p	σ_x	σ_y	σ_z
(0°,0°)	7	4.53E-15	9.97E-14	3.24E-8
(-10°,90°)	5	8.53E-17	1.24E-16	4.39E-8
(30°,30°)	5	1.19E-14	1.02E-5	1665.4
(-30°,-100°)	6	2.17E-14	2.04E-14	3.29E-15
(-30°,140°)	5	6.91E-17	1.01E-15	7.78E-16

以上数据中,每一个多项式的阶数都对应三个拟和残余均方。大多数情况下,由某个阶数得出的三个方向的拟和残余均方都是最小的。只有极个别的情况下,某两个拟和残余均方最小,而另一个残余均方稍大。如对于普通多项式模型,特征点(-30°,-100°)处,在 $p=5$ 时,三个残余均方分别为 $3.89E-9$ 、 $6.56E-10$ 、 $4.10E-9$ 。而在 $p=6$ 时,三个残余均方分别为 $3.81E-9$ 、 $3.64E-9$ 、 $2.16E-8$ 。可以看到, $p=5$ 时仅在 x 轴方向稍大于 $p=6$,而在 y 、 z 方向上的拟和精度远高于 $p=6$ 的拟和精度。对于这种情形,仅考虑其整体(三个方向上)的拟和精度,而并不要求其拟和精度在各个方向都最优。

由以上结果可见,中心化模型的效果较好。在多项式阶数 $p=6$ 时,其拟和的残差量级在 10^{-11} 左右,而这是太阳系最大行星木星的摄动力的量级。对于非线性模型,在绝大多数情况下拟和的效果要优于前两种模型,但是可以看到在个别地方的拟和效果奇差。这主要是由于非线性模型的计算中有除法,因此当分母在0附近时,存在奇异点,此时要拟和的数据范围就变得非常大,在这种情况下,效果就很差,如在(30°,30°)时,伪中心 z 轴的分量范围在-6.45~0.11之间连续变化,可见中间出现奇异点0,此时非线性多项式模型中的除法会引起极大的误差。综上所述,非线性模型的拟和效果没有保障,所以实际模型推荐采用中心化模型。

7 引力估计函数(GAAF)性能测试

考虑200km~350km的轨道范围。首先利用上面的中心多项式模型,取阶数 $p=6$,拟合得到引力估计函数需要的伪中心系数。

考虑初始条件为:近地点200km,远地点350km的椭圆轨道,轨道倾角 $i=42^\circ$,升交点赤经为 0° ,近地点幅角为 0° ,轨道运行时间为2天。引力加速度模型分别采用70×70阶EGM96模型、30×30阶EGM96模型、引力场估计函数。轨道积分算法为RKF78积分器,积分误差为 $1.0E-10$ 。计算结果为(以70×70阶模型为参照标准,误差为与70×70阶模型比较的结

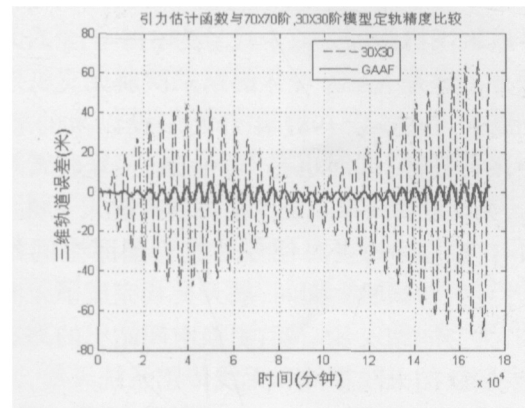
果,计算机配置为奔四3.0G,内存1G):

表 4 三种引力模型计算结果比较

	三维 RMS 误差(m)	计算时间(s)
70×70		3.046
30×30	27.4448	0.578
GAAF	2.5756	0.125

由上可见,选用引力估计函数计算轨道极大地减少了计算时间,而且精度要远高于30×30阶的引力模型,其计算时间约为70阶模型的4%,约为30阶模型的21.6%。

下图为30×30阶引力模型以及引力估计函数对于70×70阶引力模型的定轨精度比较。由图可以看出,30×30阶引力模型随着时间延长,定轨精度逐渐发散。而引力估计函数的定轨精度与70×70阶引力模型相当,不存在定轨精度发散。此外与70×70阶引力模型相比,引力估计函数的最大误差不超过5m。这对于要求计算量小且定轨精度高的情况非常合适。



8 结论

本文针对求解引力加速度计算量太大的问题,提出了一种实用的引力估计函数。本文分析了几种常用的拟和模型,并选取中心化多项式拟和模型作为实用的拟和模型。试验证明此方法极大的减少了计算量,与全尺度的引力模型(如70×70阶EGM96模型)相比,计算量可以忽略,而计算精度相当。值得注意的是其计算时间只有70×70阶模型的4%,只有30×30阶模型的21.6%。而代价是存储量的增加,约需2Mb的存储量。这是本方法需要改进的地方。可能的方向是另外选取合适的基函数,而不是普通的多项式函数。◇

参考文献

- [1] Hujak, R.S., Gravity Acceleration Approximation Function, A96-40059 11-12, AAS, vol 93, pt. 1, pp.335-349, 1996
- [2] Raymond H. Mayers, Classical and Modern Regression with Applications (Second Edition), Higher Education Press, 2005, May
- [3] Abramowitz, M., Irene A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publication, New York, 1965.