

卫星点波束覆盖区域算法研究

李德治 窦朝晖 吕波 魏波

(北京跟踪与通信技术研究所)

摘要 本文根据立体空间中点、线、面之间的几何关系,对卫星天线点波束覆盖地球表面区域的算法进行了研究,给出其解析方法及其相应的计算机软件编程算法。

关键词 点波束 覆盖区域 算法

分类号 V411.8 **文献标识码** A **文章编号** 1674-5825 (2009) 04-0053-03

1 引言

由于卫星保密安全性要求,点波束技术在国内外得到了一定的发展和应用。点波束的特点是其截面为圆形或椭圆形,仅覆盖地球表面的一定区域,这种波束比全球波束小,能实现局部区域信号覆盖,具有更高的安全保密性;而且卫星点波束以其具有可移动天线结构简单、精度高等优点,从而得到广泛应用。

在确定了卫星波束中心的指向后,卫星测控站大多实现了对卫星双轴定位机构在俯仰和方位两个方向上移动的自动控制。在由多个测控站组成的测控网中,有时要求卫星点波束仅覆盖指定的测控站、同时还要避开特定测控站。解决问题的关键就是要确定卫星点波束中心的指向及其所覆盖的地球表面区域。基于上述实际工程应用需求,我们对点波束所覆盖的地球表面区域进行了研究,取得了预期的研究成果。

本文介绍了求解卫星点波束覆盖区域的数学模型建立方法,以及可用于编程实现的相应算法。

2 数学模型

如图 1 所示,设卫星在 S 点,经度为 LS ,纬度为 BS ,高度为 HS 。天线中心点指向地球所在点为 G 点,

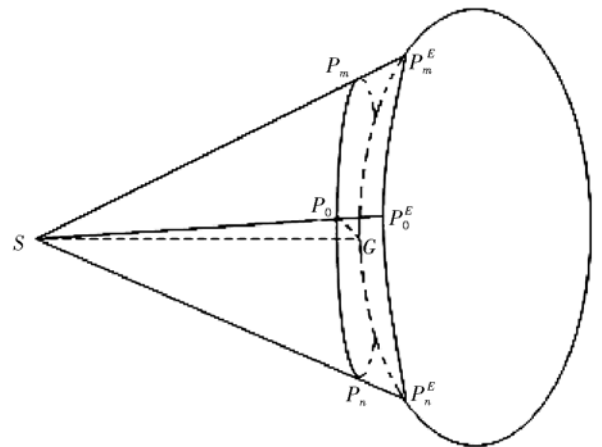


图 1 卫星波束在地球上的覆盖范围示意图

经度为 LG ,纬度为 BG 。对于地球同步卫星, $BS=0.0^\circ$, $HS=35786600.0\text{m}$ 。

要得到卫星波束在地球上的覆盖区域,我们以 S 为顶点,直线 SG 为轴,作一圆锥,其母线与轴的夹角为卫星天线的波瓣宽度。该圆锥与地球的交集即为覆盖区域。在实际应用中我们只需要给出覆盖区域的边界。

设 S 和 G 点的直角坐标分别为 $S(x_s, y_s, z_s)$, $G(x_c, y_c, z_c)$ 。以 G 为圆心作圆锥底面,则底面边界为一个圆。如果 $LG=LS, BG=BS=0.0^\circ$,则这个底面与地球相切,否则与地球相交。该圆锥底面半径 R 为:

$$R=d_{SG} \times \text{tg}(\beta)$$

其中 d_{SG} 为 S 到 G 的距离, β 为卫星天线波瓣宽度, 由用户给出。

$$d_{SG} = \sqrt{(x_S - x_G)^2 + (y_S - y_G)^2 + (z_S - z_G)^2}$$

要得到卫星波束在地球上的覆盖区域边界, 我们先在过 G 点的圆锥底面边界上均匀选取 N 点, 再求过这 N 个点的圆锥母线与地球的交点即得覆盖区域的边界。当某条圆锥母线与地球无交点时就需要向内收缩直至与地球相交。

为了便于编程实现, 需要在过 G 的圆锥底面边界上选取一点 P_0, P_i 可通过绕 G 点在底面圆锥上逆时针旋转 GP_0 得到, 旋转角度 $\theta = i \times 2\pi / N$ 。下面我们主要介绍求解 P_0 点, P_i 点, 以及母线 SP_i 与地球交点 P_i^E (即覆盖区域边界点集) 的算法。

3 求 P_0 算法

在所作底面边界找一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 。根据条件 P_0 到 G 的距离为 R, 直线 P_0G 与 SG 垂直这两个条件得到下列两个方程:

$$\sqrt{(x_0 - x_G)^2 + (y_0 - y_G)^2 + (z_0 - z_G)^2} = R \quad (1)$$

$$(x_0 - x_G)(x_G - x_S) + (y_0 - y_G)(y_G - y_S) + (z_0 - z_G)(z_G - z_S) = 0 \quad (2)$$

要解出 x_0, y_0, z_0 还需要一个条件, 我们设:

$$z_0 = z_G \quad (3)$$

求解上述三个方程组成的方程组得到 P_0 :

如果 $y_S = y_G$ 则

$$x_0 = x_G$$

$$y_0 = y_G \pm R \text{ (为推导方便, 只取+)}$$

$$z_0 = z_G$$

否则

$$x_0 = x_G \pm R \sqrt{1 + \frac{(x_S - x_G)^2}{(y_S - y_G)^2}} \text{ (为推导方便, 只取+)}$$

$$y_0 = y_G - \frac{x_S - x_G}{y_S - y_G} (x_0 - x_G)$$

$$z_0 = z_G$$

4 求 P_i 算法

在过 G 点的圆锥底面上, 绕 G 点把 GP_0 逆时针

旋转 $\theta = i \times 2\pi / N$ 得到 P_i, P_i 由下列方程组确定:

$$\sqrt{(x_i - x_G)^2 + (y_i - y_G)^2 + (z_i - z_G)^2} = R \quad (4)$$

$$(x_S - x_G)(x_G - x_i) + (y_S - y_G)(y_G - y_i) + (z_S - z_G)(z_G - z_i) = 0 \quad (5)$$

$$(x_0 - x_G)(x_i - x_G) + (y_0 - y_G)(y_i - y_G) + (z_0 - z_G)(z_i - z_G) = R^2 \times \cos\theta \quad (6)$$

方程(4)与(1)一致, (2)与(5)一致, 只不过下标改变了。下面是解方程组(4),(5),(6)得到 P_i 的具体算法:

$$\text{如果 } \theta = \pi, \text{ 则 } \begin{cases} x_i = 2x_G - x_0 \\ y_i = 2y_G - y_0 \\ z_i = 2z_G - z_0 \end{cases}$$

在 $\theta \neq \pi$ 时, 我们先把 z_i 当已知数(需要条件 $x_S \neq x_G, y_S \neq y_G$, 如果条件不满足, 作一下置换即可), 解关于 x_i, y_i 的(5),(6)线性方程组, 得到

$$x_i = a_{11}z_i + a_{12}$$

$$y_i = a_{21}z_i + a_{22}$$

$$\text{其中 } \begin{cases} a_{11} = (c_2 b_1 - c_1 b_2) / d \\ a_{12} = (b_1 d_2 - b_2 d_1) / d \\ a_{21} = (a_2 c_1 - a_1 c_2) / d \\ a_{22} = (d_1 a_2 - d_2 a_1) / d \end{cases}$$

其中 $a_1 = x_0 - x_G, b_1 = y_0 - y_G, c_1 = z_0 - z_G$

$$a_2 = x_S - x_G, b_2 = y_S - y_G, c_2 = z_S - z_G$$

$$d_1 = R^2 \cos\theta + x_G a_1 + y_G b_1 + z_G c_1$$

$$d_2 = x_G a_2 + y_G b_2 + z_G c_2$$

$$d = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

把 x_i, y_i 关于 z_i 的表达式代入(4)式得到关于 z_i 的一元二次方程

$$a_2^i z_i^2 + 2a_1^i z_i + a_0^i = 0 \quad (7)$$

其中 $a_2^i = 1 + a_{11}^2 + a_{21}^2$,

$$a_1^i = a_{11}(a_{12} - x_G) + a_{21}(a_{22} - y_G) - z_G$$

$$a_0^i = (a_{12} - x_G)^2 + (a_{22} - y_G)^2 + z_G^2 - R^2$$

再调用一个求解一元二次方程的函数就可得到方程(7)的解 z_i , 从而得到 x_i, y_i 。

5 已知 P_i 求的算法

设已经求得 $P_i (i=0, 1, 2, \dots, N-1)$ 的直角坐标 $(x_i,$

y_i, z_i), 则直线 SP_i 的参数方程为:

$$\begin{aligned} x &= x_s + k(x_i - x_s) \\ y &= y_s + k(y_i - y_s) \\ z &= z_s + k(z_i - z_s) \end{aligned} \quad (8)$$

我们把地球看作一个标准的椭球, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (其中 a, b 分别为地球的长、短半轴)。把

SP_i 的参数方程代入椭球方程并整理得到关于 k 的一元二次方程:

$$a_2 k^2 + 2a_1 k + a_0 = 0 \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(x_0 - x_s)^2}{a^2} + \frac{(y_0 - y_s)^2}{a^2} + \frac{(z_0 - z_s)^2}{b^2} \\ a_1 &= \frac{x_s(x_0 - x_s)}{a^2} + \frac{y_s(y_0 - y_s)}{a^2} + \frac{z_s(z_0 - z_s)}{b^2} \\ a_0 &= \frac{x_s^2}{a^2} + \frac{y_s^2}{a^2} + \frac{z_s^2}{b^2} - 1 \end{aligned}$$

再调用一个求解一元二次方程的函数就可得到

$$\text{方程 (9) 的解 } k = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2 a_0}}{a_2} \quad (\text{舍去解 } k = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2 a_0}}{a_2})$$

把 k 代入(8)得到覆盖区域的第 i 个边界点。

6 母线与地球不相交时的算法

前面介绍的求 P_i^E 的算法是方程 (9) 有解的情况。当方程(9)无解时, 说明母线 SP_i 与地球无交点。此时我们沿射线 $P_i G$ 以步长 h (h 可调, 程序自适应的) 向内收缩得到新的点 P'_i , 然后用前一节的算法求得交点。

7 结束语

对于健壮软件, 必须判断 G 是否在椭球上且与卫星在同一侧, 否则软件可能需要花很长的时间才能得出无覆盖的结论, 或进入死循环。

在求 P_i 时, 方程有两个解, 这两个点在 G 的两侧且三点共线。如果输出点是偶数时, 这两个点和 S 的连线与椭球的交点都是覆盖区域边界的输出点。编程时可以限制输出点为偶数, 改进算法以减少运算量, 运算速度可提高一倍左右。

本文介绍的模型和算法是针对地球同步卫星的点波束覆盖区域确定。该方法也可以进一步应用于确定其它类型卫星的点波束覆盖区域。在覆盖区域确定及编程实现时, 对于地球同步卫星实现起来相对简单一些, 而其它卫星要复杂一些。对于地球同步卫星, 已知定点位置和点波束中心指向后, 点波束覆盖区域是不变的, 进行一次计算即可; 对于其它类型的卫星, 其位置相对于地球是变化的, 即使点波束中心指向不变, 其覆盖区域也是随时间变化的, 因此需要随时间重新计算。

The Algorithm for Coverage Scope of Satellite Point Beams

LI Dezhi DOU Zhaohui LV Bo WEI Bo

(Beijing Institute of Tracking and Telecommunication Technology)

Abstract: This paper introduces the algorithm for coverage scope of satellite point beams. First we introduce the analytic method, then give the algorithm for coding. According to the geometric relationship of points, lines and planes in space, corresponding algebra equations are deduced, and the coordinates of boundary points of coverage scope are obtained by assuming some initial value conditions.

Key words: Point Beams, Coverage Scope, Algorithm